ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА ВШЭ ПО ТЕОРИИ ИГР: РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ВТОРОГО ТУРА

- **Задача 1.** (13 баллов) *"Задача о слепых старушках"*

  а) (3 балла) При $N = 4$ найдите чистую стратегию старушек, гарантирующую поимку кошки.

  Решение: Первая старушка бегает по кругу по коридорам внизу на максимальной скорости; три других старушки начинают с точки, где сходятся лестницы и спускаются вниз, тем самым вынуждая кошку прятаться на первом этаже, где ее в итоге ловит первая старушка.

  б) (+10 баллов) Та же задача при $N = 3$. (достаточно решить этот пункт)

  Решение: Первая старушка бегает по одной и той же лестнице вверх-вниз; вторая старушка бегает взад-вперед по коридору, не смежному с лестницей. Третья старушка обегает цикл, образованный двумя оставшимися лестницами и двумя оставшимися коридорами. Перемещения старушек синхронизированы так, что третья встречает своих напарниц каждый раз, пробегая мимо соответствующей лестницы или коридора. Это приводит к тому, что кошка вынуждена прятаться где-то на цикле, по которому бегает третья старушка. Значит старушка в итоге поймает кошку из-за разности скоростей.

- **Задача 2.** (16+X баллов) *"Свитер с оленями"*

  а) (3 балла) Покажите, что равновесие в чистых стратегиях единственно, и найдите его.

  Решение: Пусть набор времен $t_1, t_2, ..t_N$ образует чистое равновесие. Тогда $t_i = 0$ для любого i: иначе игроку k с самым поздним t_k выгодно отклониться и поставить $t'_k = \min_i t_i - \varepsilon$.

  б,в) (10+3 баллов) Существует ли при смешанное равновесие, в котором хипстеры получают положительную ожидаемую полезность? Постройте такое равновесие или покажите, что таких равновесий нет.

  Покажем, что таких равновесий нет. Предположим обратное. Пусть $(\rho_1, ..\rho_N)$ — равновесие (т.е. $\rho_k([a, b])$ — вероятность того, что игрок k придет в интервале времени $[a, b]$). Предположим, что хипстер 1 поучает положительную ожидаемую полезность. Это значит, что и все остальные получают положительную полезность — иначе у них есть выгодное отклонение: скопировать стратегию хипсетра 1. Пусть T_k — самый поздний момент, в который может прийти хипстер k (т.е. $T_k = \sup\{x \mid \rho_k([0, x]) \leq 1\}$. Заметим, что все T_k совпадают. В самом деле, свитер заведомо будет продан в момент $T = \min_k T_k$, а значит приходить позже бессмысленно. Заметим, что ни один хипстер не приходит в момент времени T с положительной вероятностью, т.к. иначе его оппонентам выгодно приходить в $T - \varepsilon$. Иными словами у ρ_k нет атома в точке T.

  Все чистые стратегии t из носителя ρ_1 приносят игроку 1 одинаковую ожидаемую полезность U_1 (когда остальные игроки придерживаются своей равновесной стратегии. По предположению $U_k > 0$. Имеем

  $$U_1 = \mathbb{E}u(x, t_2, ...t_n) = x\mathbb{P}(\forall i \neq 1\ t_i \geq x) = x \prod_{k=2}^{N} \rho_k([x, T]).$$

  При $x \to T - 0$ правая часть стремится к 0, а значит и U_1 равно нулю. Противоречие.

- **Задача 3.** (14 баллов) *"Повторяю еще раз!"*

  а) (2 балла) Верно ли, что если Γ_δ не имеет равновесий по Нэшу в чистых стратегиях, то Γ также не имеет равновесий по Нэшу в чистых стратегиях?[1]

  Решение: Да, верно, т.к. каждое равновесие в одношаговой игре порождает равновесие в многошаговой: просто играем на каждом шаге одну и ту же равновесную стратегию.

  б) (8 баллов) Верно ли, что, если Γ не имеет равновесий по Нэшу в чистых стратегиях, то Γ_δ также не имеет равновесий по Нэшу в чистых стратегиях?

  Решение: Нет, не верно. Приведем пример повторяющейся игры с чистым равновесием, такой, что в одношаговой чистых равновесий нет:

$2,2$	$1,1$
$3,0$	$0,1$

  . Рассмотрим такие стратегии в повторяющейся игре. Для игрока 1: играть верхнюю строку на первом шаге; если игрок 2 хоть однажды сыграл правый столбец, играть нижнюю строку, иначе играть верхнюю. Аналогично определяем стратегию второго игрока.При достаточно большом δ получаем равновесие.

  в) (4 баллов) Ответьте на вопросы а) и б), когда дополнительно известно, что Γ — игра с нулевой суммой.

  Решение: Существование чистого равновесия в одношаговой и повторяющихся играх становятся эквивалентны. В самом деле, первый шаг оптимальной стратегии в повторяющейся игре задает оптимальную стратегию в одношаговой.

[1] Чистая стратегия в многошаговой игре — это правило, которое на каждом шаге игры говорит, какое действие игроку выбрать в зависимости от предыстории (действий игроков на предыдущих шагах).

- **Задача 4.** (14 баллов) *"Бал(л)"*

В этой задаче единственный стабильный мэтчинг (женщина высшего ранга мэтчится с наиболее предпочтительным мужчиной, затем женщина второго ранга выбирает лучшего из оставшихся итп), и к нему приходит как Men-proposing Deferred acceptance, так и Women-proposing Deferred acceptance, поэтому в обоих танцах каждая дама будет танцевать с одним и тем же кавалером.

- **Задача 5.** (20 баллов) *"Задача о дефиците"*

Решение: Сначала определим релевантное подмножество колбасы: если общее количество колбасы избыточно, то только N палок "наилучших"сортов колбасы будет распределено. Назовем эту колбасу "хорошей".

Опишем равновесие в последовательной системе: каждый гражданин вносит в свой список все магазины, начиная с первого. Таким образом, каждый гражданин получает любую хорошую колбасу s с вероятностью q_s/N. Это равновесие единственно, т.к. описанная стратегия является доминантной.

Рассмотрим любое симметричное равновесие второй системы σ^*. В этом равновесии тип u получает колбасу s с какой-то вероятностью P_s. Для каждой хорошей колбасы s запишем условие "очищения рынка": количество людей получающих эту колбасу $N \sum_{u \in \mathcal{U}} \frac{1}{|\mathcal{U}|} * P_s(\sigma^*(u))$ равно количеству этой колбасы q_s.

Возьмем любого агента. Предложим этому агенту новую смешанную стратегию: играть стратегию каждого типа из $\mathcal{U}$ с одинаковой вероятностью. Следуя этой стратегии, он получает колбасу типа s с вероятностью $\sum_{u \in \mathcal{U}} P_s(\sigma^*(u))/|\mathcal{U}|$. То есть, эта стратегия приносит каждую колбасу ровно с вероятностью q_s/N! И, значит, любая равновесная стратегия σ^* второй системы приносит этому агенту лотерею не хуже, чем лотерея из первой системы.

- **Задача 6.** (23 балла) *“Хитрые синоптики”*

  Решение: Назовем синоптика откалиброванным, если для него выполнены неравенства

$$\forall q \ : \ N_q > \frac{T}{100} \quad \left| \frac{R_q}{N_q} - \frac{q}{10} \right| < 0.1. \tag{1}$$

Рассмотрим игру "с нулевой суммой где синоптик-шарлатан выбирает стратегию прогнозирования и стремится оказаться откалиброванным, а злое божество выбирает распределение погоды, так, чтобы синоптик не достиг своей цели.

Следствие теоремы о минимаксе: если для каждой смешанной стратегии оппонента игрок может гарантировать определенный уровень выигрыша, то у него есть смешанная стратегия, которая гарантирует этот же уровень против *любой* стратегии оппонента.

Т.е. достаточно проверить, что шарлатан может гарантировать откалиброванность, зная стратегию божества (т.е. распределение μ на $\{0, 1\}^T$). Стратегия устроена так: на шаге t вычисляем условную вероятность $w_{t+1} = 1$ при условии предыстории и округляем ее до десятых. Закон больших чисел влечет выполнение неравенств (1).