НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Игра полковника Блотто

Дмитрий Дагаев (НИУ ВШЭ)

30 октября 2017 г.

Расстановка войск

Поле сражения состоит из 5 боевых позиций. У полковника Блотто есть армия из 100 танков, ровно столько же – у его противника. Перед сражением они должны независимо друг от друга расставить свои войска по боевым позициям.

На каждой боевой позиции побеждает та сторона, у которой больше танков (в случае ничьей очки за поле делятся пополам). В сражении побеждает та сторона, которая выиграла больше боевых позиций.

Как полковнику Блотто расставлять войска по позициям?

Общая постановка

- 2 игрока: *A* и *B*
- Игрок *A* обладает X_A единиц ресурса, игрок *B* имеет X_B единиц
- Можно использовать нецелое число ресурса на одном поле
- *n* полей
- Тай-брейкер: если 2 игрока поставили одинаковое число ресурса на поле, то:
  - игрок *B* побеждает
  - очки за поле делятся пополам
  - другие правила (в широком диапазоне параметров игры правило тай-брейка не играет роли)

Можно ли гарантировать себе победу?

Нет – противники одинаковы, оба не могут гарантировать победу (всегда можно отклониться в симметричную расстановку)

Можно ли гарантировать себе ничью?

Если да, то это означает, что есть расстановка, которую невозможно обыграть

Как обыграть такую расстановку?

20	20	20	20	20

Максимин

20	20	20	20	20
21	21	18	20	20

Легко! Точно так же можно обыграть любую другую расстановку.

Если у каждой из армий есть шпионы в рядах соперника, то, узнав о планах друг друга, по крайней мере одна сторона захочет изменить свою расстановку

Утверждение. В игре полковника Блотто при $n \geq 3$ нет равновесия Нэша в чистых стратегиях.

Замечание. При $n = 2$ и правиле тай-брейка, при котором если 2 игрока поставили одинаковое число танков на поле, то игрок B побеждает, равновесий Нэша тоже нет.

Что такое смешанная стратегия игрока *i*?

- n-мерная плотность распределения P_i: $\mathbb{R}_n^+ \to [0,1]$
- 1-мерные функции распределения F_i^j, j=1,…,n (по функции распределения на каждое поле)

Первые результаты

- Впервые игру полковника Блотто сформулировал Борель (1921)
- Borel, Ville (1938): описано равновесие в смешанных стратегиях в игре с симметричными игроками и числом полей $n = 3$
- Gross, Wagner (1950): описано равновесие в смешанных стратегиях в игре с симметричными игроками и любым числом полей
- Gross, Wagner (1950): описано равновесие в смешанных стратегиях в игре с асимметричными игроками для случая $n = 2$

Roberson (2006) описывает равновесия в смешанных стратегиях

Случай 1. $\frac{2}{n} \leq \frac{X_A}{X_B} \leq 1$ и $n \geq 3$.

$$F_A^j(x) = 1 - \frac{X_A}{X_B} + \frac{X_A}{X_B}\frac{nx}{2X_B}, x \in \left[0, \frac{2X_B}{n}\right], j = 1, \dots, n$$

$$F_B^j(x) = \frac{nx}{2X_B}, x \in [0, \frac{2X_B}{n}], j = 1, \dots, n$$

Ожидаемые платежи игроков:

$$U_A = \frac{X_A}{2X_B}$$

$$U_B = 1 - \frac{X_A}{2X_B}$$

Случай 2. $\frac{1}{n-1} \le \frac{X_A}{X_B} < \frac{2}{n}$ и n ≥ 3.

$$F_A^j(x) = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2x}{nX_A}, x \in [0, X_A], j = 1, \dots, n$$

$$F_B^j(x) = \begin{cases} \frac{2x(X_A - \frac{X_B}{n})}{(X_A)^2}, x \in [0, X_A] \\ 1, \quad x \ge X_A \end{cases}$$

Ожидаемые платежи игроков:

$$U_A = \frac{2}{n} - \frac{2X_B}{n^2 X_A}$$

$$U_B = 1 - \frac{2}{n} + \frac{2X_B}{n^2 X_A}$$

Случай 3. $\frac{1}{n} \leq \frac{X_A}{X_B} < \frac{1}{n-1}$ и n ≥ 3.

Стратегия А:
На n-2 случайных полей распределить 0 единиц ресурса
На каждое из оставшихся 2 полей количество ресурсов задается случайной величиной, принимающей с равной вероятностью k значений, где k – параметр, вычисляемый по X_A и X_B.

Стратегия В:
На n-2 случайных полей распределить X_A единиц ресурса
На каждое из оставшихся 2 полей количество ресурсов задается случайной величиной, принимающей с равной вероятностью k значений, где k – параметр, вычисляемый по X_A и X_B.

Chowdhury, S. M., Kovenock, D., & Sheremeta (2013)

- 8 полей
- $X_A = 200, X_B = 120$
- Равновесие в смешанных стратегиях существует и единственно:

$$F_A^j(x) = \frac{x}{50}, x \in [0{,}50]$$
$$F_B^j(x) = 0{,}4 + \frac{3x}{250}, x \in [0{,}50]$$

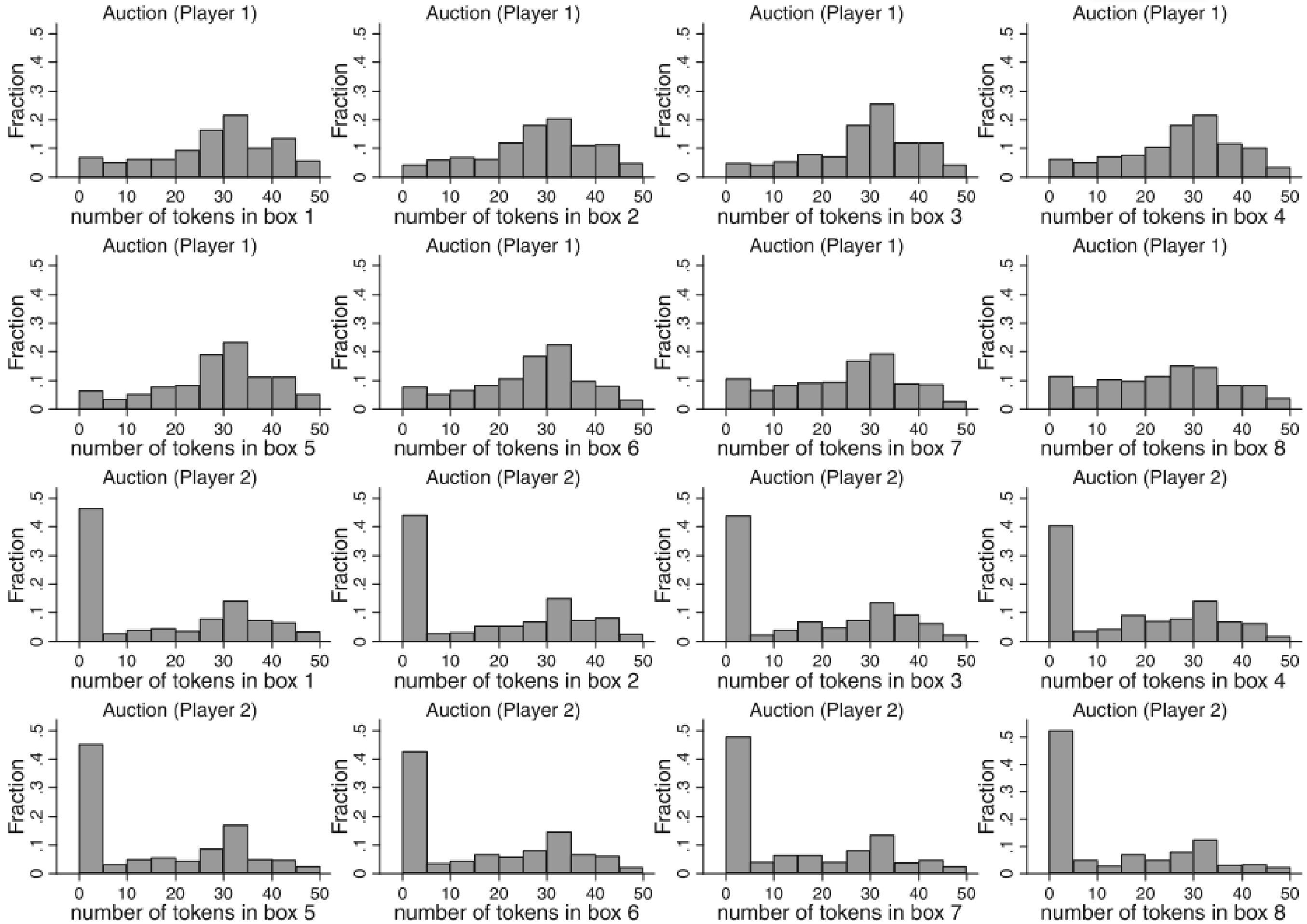
- Ожидаемые платежи: 0,7 и 0,3
- 15 периодов

Table 3 Average allocations and payoffs (strangers and partners)

Field	Lottery				Auction			
	Player 1		Player 2		Player 1		Player 2	
1	25.9	(7.6)	16.3	(10.9)	26.2	(11.9)	16.2	(15.8)
2	25.5	(7.0)	15.7	(9.4)	26.0	(11.3)	14.6	(15.3)
3	26.6	(7.6)	15.1	(9.2)	27.0	(10.9)	16.2	(15.4)
4	25.1	(7.2)	14.6	(9.1)	25.2	(11.2)	14.8	(14.7)
5	25.9	(6.8)	15.0	(9.5)	26.0	(10.9)	15.2	(15.0)
6	23.9	(7.2)	15.1	(8.7)	24.2	(10.8)	15.6	(15.1)
7	23.5	(7.6)	14.5	(8.9)	23.0	(11.5)	15.4	(14.8)
8	23.5	(9.0)	13.7	(8.9)	22.3	(12.5)	12.0	(14.0)
Payoff per box	0.64	(0.17)	0.36	(0.17)	0.71	(0.13)	0.29	(0.13)

Standard deviations in parentheses

Результаты


Auction (Player 1)
Fraction
0 .1 .2 .3 .4 .5
0 10 20 30 40 50
number of tokens in box 1
Auction (Player 1)
Fraction
0 .1 .2 .3 .4 .5
0 10 20 30 40 50
number of tokens in box 2
Auction (Player 1)
Fraction
0 .1 .2 .3 .4 .5
0 10 20 30 40 50
number of tokens in box 3
Auction (Player 1)
Fraction
0 .1 .2 .3 .4 .5
0 10 20 30 40 50
number of tokens in box 4
Auction (Player 1)
Fraction
0 .1 .2 .3 .4 .5
0 10 20 30 40 50
number of tokens in box 5
Auction (Player 1)
Fraction
0 .1 .2 .3 .4 .5
0 10 20 30 40 50
number of tokens in box 6
Auction (Player 1)
Fraction
0 .1 .2 .3 .4 .5
0 10 20 30 40 50
number of tokens in box 7
Auction (Player 1)
Fraction
0 .1 .2 .3 .4 .5
0 10 20 30 40 50
number of tokens in box 8
Auction (Player 2)
Fraction
0 .1 .2 .3 .4 .5
0 10 20 30 40 50
number of tokens in box 1
Auction (Player 2)
Fraction
0 .1 .2 .3 .4 .5
0 10 20 30 40 50
number of tokens in box 2
Auction (Player 2)
Fraction
0 .1 .2 .3 .4 .5
0 10 20 30 40 50
number of tokens in box 3
Auction (Player 2)
Fraction
0 .1 .2 .3 .4 .5
0 10 20 30 40 50
number of tokens in box 4
Auction (Player 2)
Fraction
0 .1 .2 .3 .4 .5
0 10 20 30 40 50
number of tokens in box 5
Auction (Player 2)
Fraction
0 .1 .2 .3 .4 .5
0 10 20 30 40 50
number of tokens in box 6
Auction (Player 2)
Fraction
0 .1 .2 .3 .4 .5
0 10 20 30 40 50
number of tokens in box 7
Auction (Player 2)
Fraction
0 .1 .2 .3 .4 .5
0 10 20 30 40 50
number of tokens in box 8

Результаты

Игроки играют стратегии, очень похожие на равновесие!

- Ожидаемые платежи близки к равновесию
- Игрок 1 играет равномерное распределение на [0,50]
- Игрок 2 выбирает 4 поля, на которых играет 0, на остальных – равномерное распределение
- Только 0,5% ставок больше 50

Литература

Borel, E. (1921). La théorie du jeu et les équations intégrales à noyau symétrique. *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, ***173***, 1304-1308.

Borel, E., & Ville, J. (1938). Applications de la théorie des probabilités aux jeux de hasard. Paris

Gross, O., & Wagner, R. (1950). A continuous Colonel Blotto game. No. RAND-RM-408. RAND PROJECT AIR FORCE SANTA MONICA CA.

Roberson, B. (2006). The Colonel Blotto game. *Economic Theory*, *29*(1), 1-24.

Chowdhury, S. M., Kovenock, D., & Sheremeta, R. M. (2013). An experimental investigation of Colonel Blotto games. *Economic Theory*, *52*, 833–861.