ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА ВШЭ ПО ТЕОРИИ ИГР: ЗАДАЧИ ПЕРВОГО ТУРА

- **Задача 1.** (7 баллов) *“Чем хуже, тем лучше?”*

Пусть Γ — некая игра в нормальной форме с двумя или более игроками и конечными множествами чистых стратегий. Игра Γ' получена из игры Γ уменьшением выигрышей первого игрока при некоторых профилях стратегий.

Может ли быть так, что в каждом равновесии по Нэшу игры Γ' выигрыш *каждого* игрока *больше*, чем в каждом из равновесий по Нэшу игры Γ? Обоснуйте свой ответ.

- **Задача 2.** (13 баллов) *“Дерево нормальной формы”*

При анализе последовательной игры двух игроков, данной в виде дерева, иногда возникает задача представить ее в нормальной форме, то есть в виде таблицы, в которой строки соответствуют стратегиям первого игрока, а столбцы — стратегиям второго.

Рассмотрим обратную задачу: пусть нам дана нормальная форма игры, например, представленная ниже:

$$\Gamma = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 0,2 & 3,4 & 2,0 & 1,-1 \\ \hline 1,1 & 0,0 & 1,1 & 1,2 \\ \hline 0,2 & 3,0 & 1,1 & 1,2 \\ \hline 1,1 & 5,0 & 0,3 & 3,1 \\ \hline \end{array}$$

.

Существует ли *последовательная игра с совершенной информацией* такая, что ее нормальной формой является Γ? Найдите дерево такой игры или докажите, что такой игры не существует.

- **Задача 3.** (20 баллов) *“Задача о министерствах”*

Три партии А, Б, В прошли в парламент, набрав 40%, 35% и 25% соответственно, и начинают делить 21 министерский портфель между собой. Министерства имеют одинаковую ценность, и каждая партия хочет получить как можно больше портфелей.

Закон предписывает следующий порядок распределения портфелей: на первом этапе партия, набравшая максимальное количество голосов, предлагает изначальный дележ (называемый статус-кво). На втором этапе проходит однократная демократическая процедура: случайным образом выбранная партия (вероятность быть выбранной у каждой партии равна 1/3) предлагает свой дележ портфелей, который выставляется на всеобщее голосование и принимается простым большинством голосов. Предлагающая партия также участвует в голосовании.

Если предложенный дележ не принимается, то в силу вступает статус-кво. Если партия индифферентна на этапе голосования, то она голосует “за”, а если на этапе предложения дележа партия безразлична к выбору между некоторыми дележами, то она предлагает все такие дележи равновероятно.

Какой статус-кво выбрать партии А? Сколько в среднем портфелей получит каждая партия?

- **Задача 4.** (25 баллов) *"О пользе сжигания денег"*

В первом периоде на рынке джентельменских наборов присутствует только фирма — Старожил. Во втором периоде на рынок входит Новичок, и Старожил не может этому помешать. Предвидя появление Новичка, Старожил хочет минимизировать свои потери, взяв на себя хитрое обязательство.

До выбора объема производства Q в первом периоде Старожил может выступить с публичным обещанием следующего содержания: "если произойдет некое событие A, я сожгу M рублей". Производители джентельменских наборов очень дорожат своей репутацией и не нарушают обещаний ни за какие деньги.

Для обеих фирм затраты на производство равны нулю, а цена на джентельменский набор в каждом из периодов равна $P = 1 - Q$, где Q — общее количество произведенных наборов на рынке. После входа на рынок Новичка, обе фирмы одновременно выбирают объемы производства. Старожил максимизирует свою суммарную прибыль в двух периодах.

а) (10 баллов) Выгодно ли Старожилу обещание сжечь деньги, если событие A — *"мой выпуск в первом и втором периоде различны"*? Если да, как много дополнительной прибыли оно может принести? При ответе считайте, что M достаточно велико.

б) (15 баллов) Найдите оптимальное для Старожила обязательство (A, M), где A — *произвольное* событие, которое формулируется в терминах объемов производства фирм и цены на рынке в двух периодах. Сколько дополнительной прибыли оно принесет Старожилу?

- **Задача 5.** (10+X баллов) *"Задача о добрых, но жадных организаторах"*

Организаторы Олимпиады, будучи людьми добрыми, готовы подарить Вам дополнительные баллы просто так. Просто напишите любое количество баллов (натуральное число), которое Вы хотите получить. Однако, будучи людьми экономными (а не жадными, как может показаться), собрав ответы со всех участников Олимпиады, организаторы поступят следующим образом: они разделят все запросы на группы по количеству запрошенных баллов, посчитают сумму запрошенных баллов в каждой группе, и дадут запрошенные баллы тем, в чьей группе эта сумма будет наименьшей среди всех групп. Если таких групп будет несколько, баллы получит самая многочисленная.

а) (X или 0 баллов) Напишите, какое количество X баллов Вы хотите получить?

б) (10 баллов) Найдите любое равновесие в этой игре с $N = 7$ участниками.

- **Задача 6.** (25 баллов) *"Задача о точках на прямой"*

На прямой расставлены фишки двух цветов: n синих и n красных, причем расстояния между любыми двумя фишками различные.

Алиса и Боб по очереди берут по одной фишке, каждый берет фишки только одного цвета. Начинает Алиса, она имеет возможность выбрать свой цвет фишек. Пускай она берет красную фишку K_1. Дальше Боб берет фишку синего цвета C_1. Дальше Алиса должна выбрать такую фишку K_2, чтобы она была ближе к фишке Боба C_1, чем ее предыдущая фишка K_1. Затем Боб выбирает C_2 так, что расстояние от нее до K_2 меньше чем от K_2 до C_1. Они продолжают набирать фишки таким образом, что каждая следующая выбранная фишка должна быть ближе к последней фишке оппонента чем предыдущая. Проигрывает тот, кто первым оказывается не в состоянии сделать ход.

Кто победит в этой игре?