ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА ВШЭ ПО ТЕОРИИ ИГР: РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПЕРВОГО ТУРА И КРИТЕРИИ ПРОВЕРКИ

- **Задача 1.** (7 баллов) *"Чем хуже, тем лучше?"*

  Да, так может быть. Достаточно привести пример. Рассмотрим такую игру:

$$\Gamma = \begin{array}{|c|c|}\hline 0,2 & 3,4 \\ \hline 1,1 & 5,0 \\ \hline \end{array}.$$

Единственное равновесие Нэша — левый нижний угол с платежами $1, 1$; смешанных равновесий нет.

Вычтем 1000 из выигрышей Игрока 1 от нижней строки. Получаем игру Γ'. Теперь первая строка строго доминирует вторую; удаляем вторую строку, потом удаляем первый столбец по доминированию и получаем, что правый верхний угол — единственное равновесие Нэша в Γ' с платежами $3, 4$.

Комментарии по проверке: Тех, кто привел правильный пример, но что-нибудь важное не обсудил (например единственность равновесия или отсутствие смешанных равновесий), надо штрафовать на 3 балла.

Понятно, что разных примеров можно придумать много. За особенную креативность (необычные примеры) можно добавить 1-2 балла.

- **Задача 2.** (13 баллов) *"Дерево нормальной формы"*

  Такой игры не существует.

  Доказательство (1 способ): в любой последовательной игре с совершенной информацией существует равновесие Нэша в чистых стратегиях (которое можно найти с помощью обратной индукции). А в игре Γ такого равновесия нет.

  Доказательство (2 способ): посчитать возможные терминальные вершины. В игре в нормальной форме у каждого игрока по 4 стратегии. Для игры в развернутой форме, если у каждого игрока 4 стратегии, то может получится не больше 7 терминальных вершин. Значит, в матрице не может быть больше 7 различных по выигрышам исходов, а их в ней 11.

- **Задача 3.** (20 баллов) *"Задача про министерства"*

Предположим, что был предложен статус-кво q_1, q_2, q_3, и посмотрим, что будет происходить на втором этапе. Пусть на нем выбрана партия i. Какой дележ $q' = (q_1, q_2, q_3)$ ей предложить? Конечно, она хочет q'_i побольше, но, чтобы ее предложение прошло, ей надо обеспечить себе союзника j, который поддержит предложенный ей дележ. Сделает он это, только если ему это выгодно, т. е. $q'_j \geq q_j$. Таким образом, партия i предложит дележ $q'_i = 1 - q_j$, $q'_j = q_j$, $q'_k = 0$, выбрав в союзники ту партию j, у которой статус-кво меньше.

Из-за последнего замечания оказывается, что оптимально иметь статус-кво побольше, но второй по счету (партию с наибольшим квом не будут брать в союзники).

Ответ: статус-кво $(q_A = 10, q_B = 11, q_C = 0)$ или $(q_A = 10, q_C = 0, q_B = 11)$, а ожидаемый дележ $(10 + 1/3, 7, 3 + 2/3)$ или $(10 + 1/3, 3 + 2/3, 7)$, соответственно.

Комментарии по проверке:

За ошибки в логике караем строго — неверный статус-кво в ответе свидетельство такой ошибки (-10 баллов минимум). За ошибки в вычислениях и мелкие неточности снимаем 5 баллов за каждую.

- **Задача 4.** (25 баллов) *"О пользе сжигания денег"*

Найдем сколько получит Старожил, не делая никакого заявления. На первом шаге он максимизирует $q(1-q)$ и получает прибыль в $1/4$ при выпуске в $1/2$. На втором этапе выигрыш Старожила равен $U_1 = q_1(1-q_1-q_2)$, а выигрыш Новичка равен $U_2 = q_2(1-q_1-q_2)$. Каждая из фирм отвечает оптимальным образом на выпуск конкурента, т.е. $\partial_{q_1}U_1 = 0 = \partial_{q_2}U_2$. Отсюда находим, что $q_1 = q_2 = 1/3$, а итоговый выигрыш Старожила равен $1/4 + 1/9 = 26/72$.

а) Давать такое обещание выгодно. Покажем это. При достаточно большом M (достаточно взять $M = 2$, что заведомо превосходит прибыль Старожила за два периода) в равновесии Старожил будет избегать наступления события A. То есть его выпуск q в первом периоде будет равен выпуску во втором. Оптимальный ответ q_2^* Новичка максимизирует $U_2 = q_2(1-q-q_2)$ и равен $(1-q)/2$. Тогда прибыль Старожила за два периода равна $q(1-q) + q(1-q-(1-q)/2) = \frac{3}{2}q(1-q)$. Максимум достигается при $q = \frac{1}{2}$ и равен $\frac{3}{8} = 27/72$. Это на $1/72$ больше чем в отсутствии обещания.

б) Какое бы q_1 не собирался выбрать Старожил во втором периоде, Новичок будет играть свой оптимальный ответ q_2^*. Значит, лучшее, что Старожил может получить во втором периоде — это пообещать, что его выпуск q_1 будет максимизировать $q_1(1-q_2^*-q_1)$ (т.е. будет равен равновесному выпуску Лидера в равновесии Штакельберга), а иначе он заплатит $M = 2$ рублей. Как мы знаем из пункта а) $q_2^* = (1-q_1)/2$. Следовательно, выпуск Лидера равен $1/2$, т.е. совпадает с оптимальным выпуском монополии.

В частности обещание из пункта а) оптимально.

Комментарии по проверке: За ошибки в логике караем строго (снимаем как минимум половину баллов с пункта). За ошибки в вычислениях, не влияющие на смысл происходящего, и мелкие неточности снимаем 3 балла за каждую.

- **Задача 5.** (10+X баллов) *"Задача о добрых, но жадных организаторах"*

Внимание: натуральными числами мы считаем множество $\{1, 2, 3, ...\}$ без 0. Иначе задача была бы тривиальной и организаторы не включили бы ее в олимпиаду (и по этому вопросу апеллировать не нужно!)

б) Подойдет такое детерминистическое несимметричное равновесие: 4 агента выбирают 1 балл, 2 агента выбирают 2 балла, а один агент выбирает 3 балла и выигрывает.

Также есть и другие равновесия, их тоже засчитали.

Комментарии к проверке: Тех, кто найдет (это очень сложно) симметричное смешанное равновесие в пункте б) — надо как-то премировать: например, +5 баллов.

- **Задача 6.** (25 баллов) *"Задача о точках на прямой"*

  Побеждает Боб, укажем его выигрышную стратегию:

  Разобьем все фишки на пары из одной синей и одной красной следующим алгоритмом:

  (1) выберем две ближайшие фишки разных цветов
  (2) удалим образовавшуюся пару
  (3) повторим

Если пара была удалена на итерации k алгоритма, назовем эту пару парой старости k.

Выигрышная стратегия Боба выглядит таким образом: если Алиса выбирает фишку любого цвета, Боб выбирает ее пару.

Доказательство выигрышности:
— если Боб выбирает фишку из пары старости k, то Алиса на следующем шаге вынуждена выбирать фишку из пары старости $< k$
— Боб при этом не проигрывает, так как выбираемая им в ответ фишка является ближайшей среди всех фишек старости $\geq k$
— в то же время он вынуждает Алису выбирать все более молодые фишки
— если Алиса выбирает фишку из пары, которую мы убрали на первом круге алгоритма, то Боб, выбирая пару этой фишки, побеждает

Комментарии к проверке: За правильный ответ (при наличии вычислений хотя бы на примерах): 5 баллов

Если кто-нибудь придумает доказательство наличия у Боба выигрышной стратегии, без ее явной конструкции — это полный балл!