ОТКРЫТАЯ ОЛИМПИАДА ВШЭ ПО ТЕОРИИ ИГР: ЗАДАЧИ ВТОРОГО ТУРА

• **Задача 1.** (13 баллов) *"Задача о слепых старушках"* N слепых старушек живут в двухэтажном доме с тремя коридорами на первом этаже и с тремя сходящимися наверху лестницами, длины каждой лестницы и каждого коридора равны. То есть дом — единичный тетраэдр, где рёбра — это лестницы и коридоры.

Старушки потеряли кошку, которая находится где-то на ребрах тетраэдра. Перемещаются кошка и старушки только по ребрам, старушки бегают чуть-чуть быстрее кошки.

Старушки придумывают стратегию поимки кошки — в каком порядке надо обегать тетраэдр, чтобы наверняка ее поймать. Кошка видит старушек, слышит их переговоры и может оптимально ответить на их стратегию.

а) (3 балла) При $N = 4$ найдите чистую стратегию старушек, гарантирующую поимку кошки.
б) (+10 баллов) Та же задача при $N = 3$. (достаточно решить этот пункт)

• **Задача 2.** (16+X баллов) *"Свитер с оленями"* В период распродаж многие сталкиваются со сложной стратегической задачей. С одной стороны хорошо бы прийти попозже и купить подешевле, но если прийти слишком поздно, то окажешься у пустых прилавков.

В одной холодной снежной стране N хипстеров мечтают о свитере с оленями. В период распродаж цена свитера зависит от времени так: $p(t) = 1 - t$, $t \in [0, 1]$. Купив свитер по цене p, хипстер получает полезность $1 - p$, а оставшись без свитера — нулевую полезность. Свитер в магазине всего один, так что первый, кто за ним придет, станет его счастливым обладателем. Если несколько хипстеров придут одновременно, свитер достанется каждому из пришедших с равной вероятностью.

а) (3 балла) Покажите, что равновесие в чистых стратегиях единственно, и найдите его.
б) (10 баллов) Существует ли при $N = 2$ смешанное равновесие, в котором хипстеры получают положительную ожидаемую полезность? Постройте такое равновесие или покажите, что таких равновесий нет.
в) (+3 балла) Тот же вопрос для произвольного N.
г) (X баллов) Представьте, что Вы один из хипстеров, осталось 15 свитеров, распродажа длится 31 день $t = 1, 2, ...31$, а стоимость свитера $p(t) = 31 - t$. Полезность от получения свитера по цене p равна $31 - p$. Напишите, в какой день t Вы придете на распродажу. Вы получите X баллов, где X — целая часть ожидаемой полезности. За свитер с Вами будут конкурировать остальные участники Олимпиады.

• **Задача 3.** (14 баллов) *"Повторяю еще раз!"*

Пусть Γ — некая конечная игра, а Γ_δ — бесконечно повторяемая версия Γ с коэффициентом дисконтирования $\delta \in (0; 1)$.

а) (2 балла) Верно ли, что если Γ_δ не имеет равновесий по Нэшу в чистых стратегиях, то Γ также не имеет равновесий по Нэшу в чистых стратегиях?[1]
б) (8 баллов) Верно ли, что, если Γ не имеет равновесий по Нэшу в чистых стратегиях, то Γ_δ также не имеет равновесий по Нэшу в чистых стратегиях?
в) (4 баллов) Ответьте на вопросы а) и б), когда дополнительно известно, что Γ — игра с нулевой суммой.

• **Задача 4.** (14 баллов) *"Бал(л)"*

В уездном городе NN на балу встречаются N кавалеров и N дам. У всех дам *одинаковые* строгие предпочтения относительно кавалеров (в зависимости от того, кто из них лучше танцует), у кавалеров тоже строгие предпочтения относительно дам, но *не обязательно одинаковые*. Для каждого кавалера и для каждой дамы танцевать хотя бы с кем-то лучше, чем стоять в одиночестве.

Во время обычного танца определение пар происходит таким образом. На первом круге приглашений каждый кавалер приглашает свою "первую" даму (ту, которая ему нравится больше

[1] Чистая стратегия в многошаговой игре — это правило, которое на каждом шаге игры говорит, какое действие игроку выбрать в зависимости от предыстории (действий игроков на предыдущих шагах).

всего). Дама выбирает из всех приглашений лучшее и отказывает остальным. Однако она не спешит с ответом лучшему из пригласивших, ожидая, что в будущем она может получить приглашение от более желанного кавалера. На втором круге каждый кавалер, получивший отказ, идёт к своей "второй" даме (лучшей, которая ещё не отказала), и снова каждая дама выбирает из всех приглашений лучшее и отказывает остальным. И так далее пока все не разобьются на пары.

Во время "белого танца" всё происходит в точности наоборот: дамы приглашают кавалеров, в остальном процедура сохраняется.

Какой из танцев — обычный или "белый" — более предпочтителен для дам?

- **Задача 5.** (20 баллов) *"Задача о дефиците"*

В 1973 году в СССР производилось K сортов колбасы (назовём их $1, 2, ..., K$). Каждый из N граждан имел предпочтения, заданные вектором полезностей $u^n = (u_1^n, u_2^n, ..., u_K^n)$, таким, что $1 > u_1^n > u_2^n > ... > u_K^n > 0$ (колбаса с меньшим индексом всем гражданам нравится больше). Вектор полезностей гражданина n выбирается равновероятно из конечного множества возможных векторов $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}_+^K$. Векторы разных граждан независимы.

Стратегия каждого гражданина выглядит так: утром он составляет список магазинов и обходит их согласно списку. Каждый магазин s продает только один сорт колбасы s и имеет всего q_s палок колбасы. Граждане собираются перед магазином в очередь и стоят, пока вся колбаса не будет распродана. Место в очереди определяется случайно, и если пришло $n_s > q_s$ граждан, то каждый получает колбасу с вероятностью q_s/n_s. Таким образом, сначала каждый гражданин имеет шанс получить колбасу в первом по списку магазине, потом, если там ему не досталась колбасы, он идёт во второй по списку магазин и соревнуется там за остатки колбасы со всеми другими, кто указал этот магазин вторым и кому ранее не досталась колбаса (если же во втором магазине не осталось колбасы, то каждый пришедший идёт в свой третий по списку магазин, но успевает только к приходу тех, кто указал этот магазин третьим), и так далее, пока им не достанется колбаса или не закончится список. Ценой колбасы и временем, потраченным на её поиски, можно пренебречь.

Правительство сравнивает две системы продаж: открывать магазины в порядке повышения индекса (сначала магазин 1, когда колбаса 1 будет распродана, то открывать магазин 2 и так далее) или же открывать все магазины одновременно.

Какую систему выбрать? Покажите, что любое симметричное равновесие по Нэшу одной системы дает бо́льшую ожидаемую полезность каждому гражданину в сравнении с любым симметричным равновесием другой системы.

- **Задача 6.** (23 балла) *"Хитрые синоптики"*

В последние десять лет вместо самой погоды синоптики стали предсказывать ее вероятность: например, "вероятность дождя завтра 90%". С такими прогнозами отличить шарлатана от того, чей прогноз действительно значим, стало гораздо сложнее.

В 2011 году правительство Великобритании предприняло попытку оценить качество прогнозов разных метеорологов. Методика была такая. Каждый день $t = 0, 1...T$ на туманном Альбионе либо идет дождь ($w_t = 1$), либо нет ($w_t = 0$), а метеоролог публикует свое предсказание p_{t+1} для вероятности $w_{t+1} = 1$ (т.е. вероятности того, что завтра будет дождь) *с точностью до первого знака после запятой.* Обозначим через N_q число дней t, когда метеоролог предсказывал $p_t = \frac{q}{10}$, а через R_q число тех из них, когда шел дождь. Оказалось, что для многих метеорологических групп $\frac{R_q}{N_q}$ близко к $\frac{q}{10}$, что было воспринято, как подтверждение высокого качества работы синоптиков.

Шарлатан — это такой метеоролог, который в момент времени t ничего не знает про распределение w_{t+1} и основывает свой выбор p_{t+1} только на истории погоды $h_t = \{w_0, w_1, ..w_t\}$.

Покажите, что когда T велико, у шарлатана есть смешанная стратегия, гарантирующая, что для любого q, такого что $N_q > \frac{T}{100}$ (т.е. для достаточно частых прогнозов), отношение $\frac{R_q}{N_q}$ будет отличаться от $\frac{q}{10}$ не более чем на 0.1 с большой вероятностью, *каково бы ни было распределение случайных величин* $w = \{w_t\}_{t=0}^T$. Достаточно доказать существование, описывать стратегию не требуется.